BAC S MÉTROPOLE 2019 MATHÉMATIQUES

Victor Dansage
17 juillet 2019

Exercises 1 (6 points) : commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

$$f(x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

   Solution:
   Nous savons que : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -e^x = -\infty$.
   Par sommation des limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

   (b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

   Solution:
   La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

   La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, si $x \in \mathbb{R}_+^*$, alors $e^x > e^{-x}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) < 0$. De plus, $f'(x)$ est nulle uniquement en $x = 0$ donc la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$

   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, une unique solution, qu'on note α.

   Solution:
   Regardons les valeurs prises par la fonction f aux bornes de l'intervalle $[0; +\infty[$.
   On a $f(0) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^0 + e^0) = \frac{5}{2}$ et d'après la question 1a, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que $f(A) < 0$.
   Or f est continue sur l'intervalle $[0, A]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^+$.
   Or nous avons montré à la question 1b que la fonction f est strictement décroissante. Elle ne s'annule donc qu'une seule fois sur $\mathbb{R}_+$ et l'on note α ce point d'annulation. $f(\alpha) = 0$

2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solution dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

   Solution:

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(-x) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^{-x} + e^{-(-x)}) = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = f(x)$$

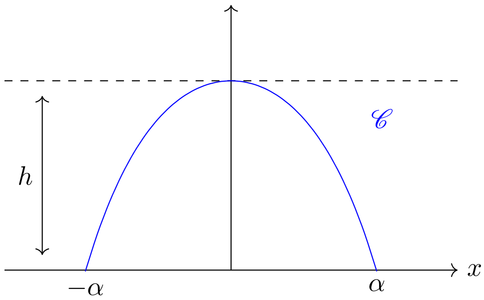
   On a montré à la question 1c, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que $\alpha \neq 0$.
   Dès lors, comme f est paire ($f(-x) = f(x)$), l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $-\alpha \neq 0$ sur l'intervalle $]-\infty; 0]$. Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions opposées sur $\mathbb{R}$.

Partie B

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température.

Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.On a représenté ci-dessous la courbe sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathscr{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur h d'un arceau.

Solution:

On peut définir la hauteur d'un arceau (représenter par la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$), comme la différences entre le maximum et le minimum de la fontion f sur l'intervalle $[-\alpha;\alpha]$. La fonction f étant paire, on peut se restreindre à l'intervalle $[0;\alpha]$.

On a montré à la question 1b que f est strictement décroissant que $\mathbb{R}^+$ donc également sur $[0;\alpha]$. Ainsi :

$$h = f(0) - f(\alpha) = f(0) = \frac{5}{2}$$

2. (a) Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

Montrer que pour tout réel x, on a : $1+(f'(x))^2 = \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2$.

Solution:

D'après la question 1b, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. De là :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad 1+(f'(x))^2 &= 1+\frac{1}{4}((e^x)^2 - 2e^xe^{-x} + (e^{-x})^2) \\
&= \frac{4}{4}+\frac{1}{4}(e^{2x} - 2 + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x}) \\
&= \frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2
\end{aligned}$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $e^{\alpha} + e^{-\alpha}$.

Solution:

Injectons le résultat précédent dans l'expression de I :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\alpha} \sqrt{1+(f'(x))^2}dx \\ &= \int_0^{\alpha} \sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}dx \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})dx \\ &= [\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})]_0^{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}-(e^0-e^0)) \\ &= \frac{1}{2}(e^{\alpha}-e^{-\alpha}) \end{aligned}$$

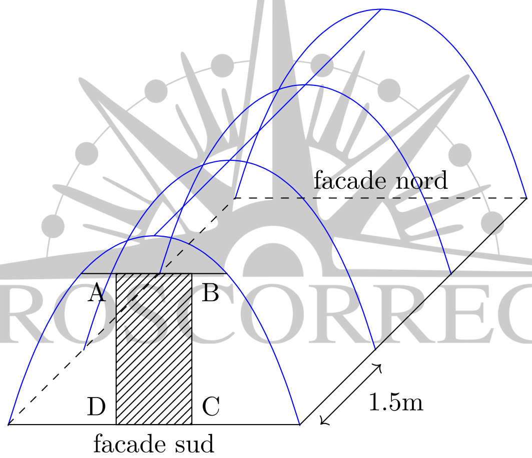
I correspond à la longueur d'un demi arceau (longueur de la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0;\alpha]$). On en déduit que la longueur d'un arceau est $e^{\alpha}-e^{-\alpha}$

Partie C

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.

Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle ABCD de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le dessus de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathscr{A} = -2+4\cdot\int_0^{\alpha} f(x)dx$$

Solution:

La surface de la face nord à couvrir correspond à l'aire de la figure formée par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses qui est égale à $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$, soit par parité de f : $2\int_0^{\alpha} f(x)dx$ (en m^2).

La surface de la face sud est la même mais il faut soustraire la surface de l'ouververture : $S_{ouverture} = 2\times 1 m^2$. Ainsi la surface à couvrir de la face sud est : $2\int_0^{\alpha} f(x)dx - 2$ (en m^2).

La quantité de bâche nécessaire pour recouvrir les façades sud et nord est donc $\mathscr{A} = -2+4\cdot\int_0^{\alpha} f(x)dx$ (en m^2).

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

Solution:

D'après la question 1 :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} &= -2 + 4 \cdot \int_0^\alpha f(x)dx \\ &= -2 + 4 \cdot \int_0^\alpha [\frac{7}{2} - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})]dx \\ &= -2 + 4 \cdot [\frac{7}{2} \cdot x - \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})]_0^\alpha \\ &= -2 + 14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha})\end{aligned}$$

De plus, il faut tenir compte de la surface du dessus de la serre. Cette surface $\mathscr{A}_{sup}$ est celle d'un rectangle de côté $e^\alpha - e^{-\alpha}$ (en m) et $3 \times 1.5 = 4.5m$ et $\mathscr{A}_{sup} = 4.5 \cdot (e^\alpha - e^{-\alpha})$.

L'aire totale de bâche nécessaire pour couvrir cette surface est donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}_t ot &= -2 + (14\alpha - 2(e^\alpha - e^{-\alpha})) + \frac{9}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \\ &= -2 + 14\alpha + \frac{5}{2}(e^\alpha - e^{-\alpha}) \\ &= 41,565878768m^2\end{aligned}$$

L'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre est $\simeq 42m^2$